

# **МАТЕМАТИКА**

## **Методическое пособие**

для студентов заочной формы обучения

## **Введение**

Курс математики, который предстоит освоить студенту – заочнику, является фундаментом математического образования. Математические знания имеют важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, которые предусмотрены учебными планами различных направлений обучения.

По результатам изучения дисциплины студенты должны выполнить домашнюю контрольную работу, аудиторную контрольную работу и сдать экзамен. В межсессионный период и во время сессий со студентами – заочниками проводятся лекционные и практические занятия, а также консультации.

В настоящем пособии содержатся общие рекомендации студентам – заочникам по работе над курсом математики, программа курса, методические указания по темам дисциплины с вопросами для самопроверки, решения типовых задач и задания контрольных работ.

## **Общие рекомендации по работе над курсом математики**

Формой обучения студента – заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В процессе самостоятельной работы студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. В помощь заочникам организуются чтение лекций, практические занятия. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача семестрового экзамена в соответствии с учебным планом по специальности.

### **Решение задач**

Чтение теоретического материала должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Решение рекомендуется выполнять в отдельной тетради.

Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно.

В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа  $\pi$  и других математических констант.

### **Самопроверка**

Опыт прочного усвоения материала темы показывает, что самопроверку проводить необходимо. В настоящем пособии приводятся для самопроверки вопросы, которые акцентируют внимание на наиболее важных, ключевых положениях темы. В процессе выполнения самопроверки необходимо избегать пользования учебником или конспектом. Желание обратиться к учебнику или конспекту показывает недостаточное усвоение материала темы.

### **Консультации**

При изучении теоретического материала или при решении задач у студента могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся. В такой ситуации студенту следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации. Если непреодолимые затруднения возникли при решении задачи, то следует указать характер затруднения, привести план решения.

### **Контрольная работа**

В процессе изучения курса студент должен выполнить домашнюю контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам студент может сделать выводы о степени усвоения им соответствующего раздела курса, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению теоретического материала.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебнике и сборниках задач решений с ответами. В дополнение к предложенным задачам сборников в данном пособии рассмотрены некоторые примеры.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – рецензента и студента с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять, поскольку без их предъявления студент не допускается к сдаче экзамена.

### **Лекции, практические занятия**

Во время экзаменационных сессий для студентов - заочников читаются лекции, проводятся занятия. На лекциях и практических занятиях проводится обзор наиболее важных разделов курса, могут рассматриваться отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых учебных пособиях.

### **Зачеты и экзамены**

К зачету допускаются студенты, выполнившие контрольные работы (работы должны быть зачтены преподавателем-рецензентом). Экзамен проводится в форме тестирования. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела: решение задач должно выполняться без ошибок и уверенно. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявленным программой.

## Таблица для определения варианта контрольной работы

Номера зачетки последние две цифры	Вариант
01,31,41,51,61,71,81,91	1
02, 32,42,52,62,72,82,92	2
03,33,43,53,63,73,83,93	3
04, 34,44,54,64,74,84,94	4
05, 35,45,55,65,75,85, 95	5
06, 36,46,56,66,76,86,96	6
07, 37,47,57,67,77,87,97	7
08, 38,48,58,68,78,88,98	8
09, 39,49,59,69,79,89,99	9
00, 10,40,50,60,70,80,90	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	28
29	29
30	30

# Методические указания

## Введение в математический анализ

### Понятие функции, свойства функций

**Определение :** Пусть даны два числовых множества  $X$  и  $Y$ . Функцией называется правило, по которому каждой переменной  $x \in X$  соответствует одно и только одно значение  $y \in Y$ .

Функция обозначается  $y = f(x)$  или  $y = y(x)$  или  $y = \varphi(x)$ .

Переменная  $x$  – независимая переменная или аргумент функции; переменная  $y$  – зависимая переменная или значение функции.

**Определение :** Множество всех значений независимой переменной  $x$ , при которых функция существует называется областью определения функции и обозначается  $D(y)$ .

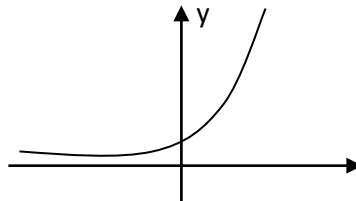
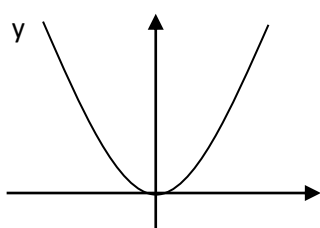
**Определение :** Множество всех возможных значений зависимой переменной  $y$  называется областью значений функции и обозначается  $E(y)$ .

Используют следующие способы задания функции:

1. Аналитический способ – задание функций с помощью формул. Например,

$$y = 2 \sin^3 x, \quad y = \sqrt{x} + x^2.$$

2. Графический способ – задание функций с помощью графика. Например,



3. Табличный способ – задание функций с помощью таблиц.

Например,

<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	9	4	1	0	1	4

4. Словесный способ – задание функций с помощью

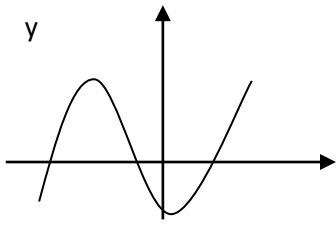
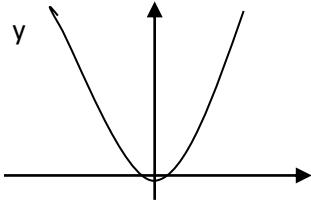
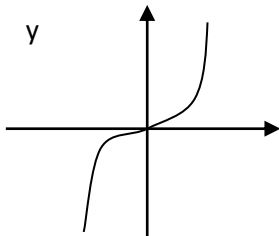
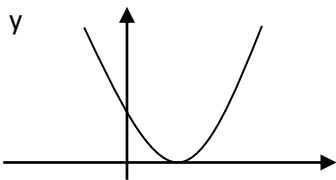
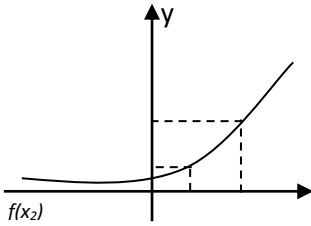
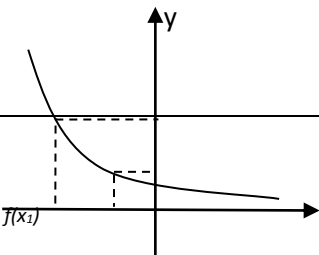
<b>t</b>	5	10	15	20
<b>S</b>	10	15	20	40

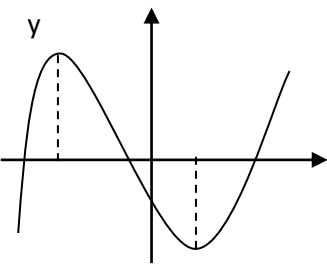
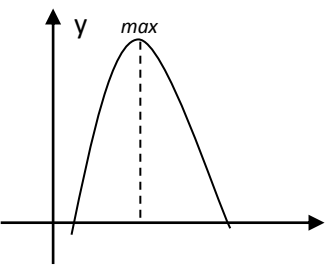
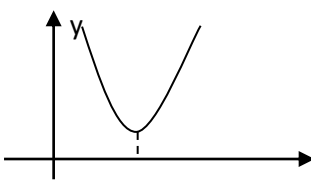
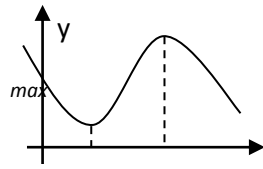
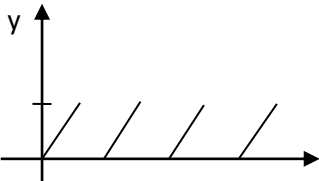
алгоритма вычисления. Например,

$$y = [x] \quad - \text{целая часть числа } x.$$

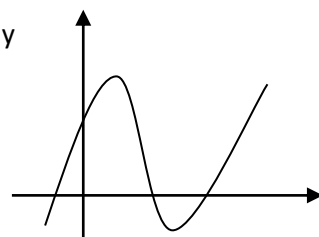
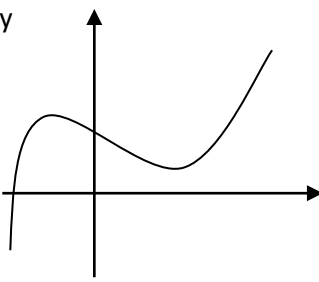
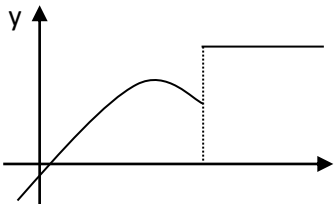
Целая часть числа  $x$  – это ближайшее целое число, не превосходящее самого числа  $x$ .

Свойства функций приведены в таблице:

Название свойства	Определение	Графическое изображение
Нули функции	Нулём функции называется то значение $x$ , при котором функция обращается в 0, то есть $f(x) = 0$ .	 <p>Нули – это точки пересечения графика функции с осью <math>Ox</math>.</p>
Чётность функции	Функция называется чётной, если для любого $x$ из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$	 <p>Чётная функция симметрична относительно оси <math>Oy</math></p>
Нечётность функции	Функция называется нечётной, если для любого $x$ из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ .	 <p>Нечётная функция симметрична относительно начала координат.</p>
	Функция которая не является ни чётной, ни нечётной называется функцией общего вида.	
Возрастание функции	Функция $f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
Убывание функции	Функция $f(x)$ называется убывающей, если	

	<p>большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е.  <math>x_2 &gt; x_1 \Rightarrow f(x_2) &lt; f(x_1)</math></p>	
	<p>Промежутки, на которых функция либо только убывает, либо только возрастает называются промежутками монотонности.</p>	 <p><math>f(x)</math> имеет 3 промежутка монотонности :  <math>(-\infty; x_1), (x_1; x_2), (x_2; +\infty)</math></p>
Локаль-ный максимум	<p>Точка <math>x_0</math> называется точкой локального максимума, если для любого <math>x</math> из окрестности точки <math>x_0</math> выполняется неравенство:  <math>f(x_0) &gt; f(x)</math>.</p>	
Локаль-ный минимум	<p>Точка <math>x_0</math> называется точкой локального минимума, если для любого <math>x</math> из окрестности точки <math>x_0</math> выполняется неравенство:  <math>f(x_0) &lt; f(x)</math>.</p>	
	<p>Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками локального экстремума.</p>	 <p><math>x_1, x_2</math> — точки локального экстремума.</p>
Периодичность функции	<p>Функция <math>f(x)</math> называется периодической, с периодом <math>T</math>, если для любого <math>x</math> выполняется равенство</p>	



	$f(x+T) = f(x)$ .	
Проме- жуткизнак опос- тоянства	Промежутки, на которых функция либо только положительна, либо только отрицательна называются промежутками знакопостоянства.	 <p> <math>f(x) &gt; 0</math> при <math>x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)</math>  <math>f(x) &lt; 0</math> при <math>x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)</math> </p>
Непре- рывность функции	Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ , если предел функции при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$	
Точки разрыва	Точки, в которых нарушено условие непрерывности называются точками разрыва функции.	 <p><math>x_0</math> - точка разрыва.</p>

## Теория пределов

**Определение:** Число  $A$  называется пределом функции  $y=f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если для любой последовательности чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  сходящейся к числу  $a$ , следует, что последовательность значений функции  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  сходится к числу  $A$ .  
 Предел функции в точке  $a$  обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

## Основные теоремы о пределах

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} C = C$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

! Все правила имеют смысл, если пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют.

### Техника вычисления пределов

При вычислении предела элементарной функции  $f(x)$  приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

- Функция  $f(x)$  определена в предельной точке  $x = a$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- Функция  $f(x)$  в предельной точке  $x = a$  не определена или же вычисляется предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что

$$\frac{C}{\infty} = 0, \frac{\infty}{C} = \infty, \infty + C = \infty, \frac{0}{C} = 0, \frac{C}{0} = \infty, 0 + C = C.$$

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция  $f(x)$  в точке  $x = a$  или при  $x \rightarrow \infty$  представляет собой неопределенность (типа  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ).

При вычислении пределов при  $x \rightarrow \infty$  основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

- а) чтобы раскрыть неопределенность типа  $\frac{\infty}{\infty}$ , необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;
- б) чтобы раскрыть неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной;
- в) чтобы раскрыть неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , иногда достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;
- г) чтобы раскрыть неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;
- д) чтобы раскрыть неопределенность типа  $\infty - \infty$ , необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  или  $\frac{0}{0}$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

Вычислить пределы функций:

**Пример 1:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^3 - 1} = \frac{2 \cdot 2^2}{2^3 - 1} = \frac{8}{7}$

**Пример 2:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1-1} = \left(\frac{5}{0}\right) = \infty$

**Пример 3:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 4}{1 + 3x^2 - x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} - 1} = \frac{5 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty} - 1} = \frac{5 - 0 + 0}{0 + 0 - 1} = -5$

**Пример 4:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)} =$   
 $= \left| \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \\ x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{-x-1} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = 0,5$

**Пример 5:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - 2)(\sqrt{4-x} + 2)}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} =$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x - 4}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3 \cdot (\sqrt{4-x} + 2)} = -\frac{1}{12}$

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что называется функцией?
2. Что такое область определения и область значений функции?
3. Перечислите способы задания функций, их достоинства.
4. Перечислите основные свойства функций.
5. Дайте определение предела функции в точке.
6. Какая функция называется непрерывной в точке?
7. Сформулируйте основные свойства пределов.
8. Как раскрывается неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ?

# Дифференциальное исчисление

## Понятие производной

**Определение:** Производной функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$  называется предел отношения ее приращения  $\Delta f(x)$  к приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$ , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция  $y=f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x$ . Если же этот предел есть  $\infty$ , то говорят, что функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x$  бесконечную производную.

**Механический смысл производной:** скорость есть первая производная пути по времени, т.е.  $v = S'(t)$ .

**Геометрический смысл производной:** тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  равен первой производной этой функции, вычисленной в точке касания, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

## Таблица производных

Процесс производных	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(\cos x)' = -\sin x$	нахождения называется
	$(u + v - w)' = u' + v' - w'$	$(\sin x)' = \cos x$	
	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
	$(C)' = 0$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
	$(x)' = 1$	$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	
	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	
	$(e^x)' = e^x$		
	$(a^x)' = a^x \ln a$		

дифференцированием функции.

Рассмотрим примеры.

Найти производные функций:

**Пример 1:**  $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2 \sin x + 9$

Решение:  $y' = \left(3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2 \sin x + 9\right)' = (3x^2)' + (\sqrt[3]{x^2})' + (2 \sin x)' + 9' =$   
 $= 6x + (x^{\frac{2}{3}})' + 2 \cos x + 0 = 6x + \frac{2}{3} x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} + 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} +$   
 $+ 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2 \cos x$

**Пример 2:**  $y = x^2 \cdot \ln x$

Решение:  $y' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$

**Пример 3:**  $y = \frac{1+x^2}{5^x}$

Решение:  $y' = \frac{(1+x^2)'5^x - (1+x^2)(5^x)'}{5^{2x}} = \frac{2x \cdot 5^x - (1+x^2) \cdot 5^x \ln 5}{(5^x)^2} =$   
 $= \frac{5^x(2x - (1+x^2) \ln 5)}{5^{2x}} = \frac{2x - \ln 5 + x^2 \ln 5}{5^x}$

## Дифференциал функции

**Определение:** Дифференциалом функции  $y=y(x)$  называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = y'(x)dx.$$

Для большей наглядности рассмотрим пример.

**Пример 1:** Найти дифференциал функции  $y = 3x^2 + 5$

Решение:  $dy = y'dx;$

Так как  $y' = (3x^2 + 5)' = 6x$ , то  $dy = 6x dx$ .

## Дифференцирование сложной функции

Пусть  $y = y(u)$ , где  $u = u(x)$  – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция  $y = y[u(x)]$  есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Производные сложных функций находятся при помощи таблицы:

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\begin{aligned}
(e^u)' &= e^u \cdot u' & (\arctgu)' &= \frac{u'}{1+u^2} \\
(a^u)' &= a^u \ln a \cdot u' & (\arccos u)' &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
(\cos u)' &= -\sin u \cdot u' & (\operatorname{arccctgu})' &= -\frac{u'}{1+u^2} \\
(\sin u)' &= \cos u \cdot u' & & \\
(\log_a u)' &= \frac{u'}{u \cdot \ln a} & &
\end{aligned}$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 1:** Найти производную функции  $y = \ln \operatorname{tg} 5x$

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } y' &= (\ln \operatorname{tg} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} (\operatorname{tg} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} (5x)' = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \\
&= \frac{5}{\sin 5x \cdot \cos 5x} = \frac{5}{\frac{1}{2} \sin 10x} = \frac{10}{\sin 10x}
\end{aligned}$$

**Пример 2:** Найти производную функции  $y = x \sin^2 \sqrt{2x-1}$

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } y' &= (x \sin^2 \sqrt{2x-1})' = x' \cdot \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (\sin^2 \sqrt{2x-1})' = \\
&= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (2 \sin \sqrt{2x-1}) \cdot (\sin \sqrt{2x-1})' = \\
&= \sin^2 \sqrt{2x-1} + 2x \cdot \sin \sqrt{2x-1} \cdot \cos \sqrt{2x-1} \cdot (\sqrt{2x-1})' = \\
&= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot \sin(2\sqrt{2x-1}) \cdot \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} + \\
&+ x \cdot \sin(2\sqrt{2x-1}) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} + \frac{x \sin(2\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x-1}}
\end{aligned}$$

### Производные высших порядков

**Определение:** Производная второго порядка (вторая производная) от функции  $y=f(x)$  есть производная от ее первой производной:

$$y'' = [f'(x)]'.$$

**Определение:** Производная третьего порядка (третья производная) от функции  $y=f(x)$  есть производная от ее второй производной:

$$y''' = [f''(x)]'.$$

**Определение:** Производная  $n$ -ого порядка ( $n$ -я производная) от функции  $y=f(x)$  есть производная от ее  $(n-1)$ -й производной:

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 1:** Найти производную второго порядка  $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ .

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } y' &= \left( \frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x - 1) - (x^2 + 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\
&= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left( \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} \right)' = \frac{[(x-1)^2 - 2](x-1)^2 - [(x-1)^2 - 2] \cdot [(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{[2(x-1)(x-1)' - (2)'](x-1)^2 - [(x-1)^2 - 2]2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)^3 - 4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-4}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

**Пример2:** Найти производную второго порядка функции  $y = e^{x^3}$ .

Решение:  $y' = (e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = e^{x^3} \cdot 3x^2$

$$\begin{aligned}
 y'' &= (3x^2 \cdot e^{x^3})' = (3x^2)' \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot (e^{x^3})' = 6x \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 = \\
 &= e^{x^3} (6x + 9x^4) = 3xe^{x^3} (2 + 3x^3).
 \end{aligned}$$

**Вопросы для самопроверки:**

1. Дать определение производной функции.
2. Что называется приращением аргумента, приращением функции?
3. Какой механический смысл имеет производная?
4. Сформулировать геометрический смысл производной.
5. Как найти производную суммы или разности?
6. Как найти производную произведения?
7. Как найти производную частного двух функций?
8. Дать определение дифференциала функции.
9. Сформулируйте правила нахождения производной сложной функции?
10. Как найти производную второго порядка? производную четвертого порядка.

## Исследование функции с помощью производной

**Определение:** Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума, если для любого  $x$  из окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x).$$

**Определение:** Точка  $x_0$  называется точкой локального минимума, если для любого  $x$  из окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x).$$

Точки минимума и максимума функции называются точками экстремума данной функции, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная  $f'(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

### Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью первой производной

1. Найти производную функции  $f'(x)$ .
2. Найти критические точки по первой производной, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . Если на промежутке

$f'(x) < 0$ , то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке  $f'(x) > 0$ , то на этом промежутке функция возрастает.

4. Если в окрестности критической точки  $f'(x)$  меняет знак

с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.

5. Вычислить значения функции в точках минимума и максимума.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

**Пример 1:** Найти промежутки монотонности и экстремумы функции:  
 $f(x) = x^3 - 3x^2$ .

Решение: Найдем первую производную функции  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ .




Найдем критические точки по первой производной, решив уравнение

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, 2)$	$2$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		т. max 0		т. min -4	

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Ответ: Функция возрастает при  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ ;

функция убывает при  $x \in (0; 2)$ ;

точка минимума функции  $(2; -4)$ ;

точка максимума функции  $(0; 0)$ .

### Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной

1. Найти производную  $f'(x)$ .

2. Найти стационарные точки данной функции, т.е. точки, в которых  $f'(x) = 0$ .

3. Найти вторую производную  $f''(x)$ .

4. Исследовать знак второй производной в каждой из стационарных точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

**Пример 1:** Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Решение: Находим производную:  $f'(x) = 2x - 2$ .



Решая уравнение  $f'(x) = 0$ , получим стационарную точку  $x = 1$ . Найдём теперь вторую производную:  $f''(x) = 2$ .

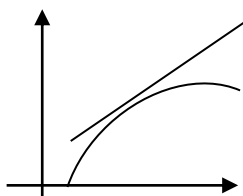
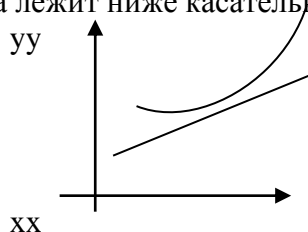
Так как вторая производная в стационарной точке положительна,  $f''(1) = 2 > 0$ , то при  $x = 1$  функция имеет минимум:  $f_{\min} = f(1) = -4$ .

Ответ: Точка минимума имеет координаты  $(1; -4)$ .

### Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

**Определение:** Кривая  $y = f(x)$  называется выпуклой вниз в промежутке  $(a; b)$ , если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.

**Определение:** Кривая  $y = f(x)$  называется выпуклой вверх в промежутке  $(a; b)$ , если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.



**Определение:** Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются промежутками выпуклости графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции  $y = f(x)$ , характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке  $f''(x) > 0$ , то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же  $f''(x) < 0$ , то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

**Определение:** Точка графика функции  $y = f(x)$ , разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут служить только критические точки II рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции  $y = f(x)$ , в которых вторая производная  $f''(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

### Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

1. Найти вторую производную  $f''(x)$ .
2. Найти критические точки II рода функции  $y = f(x)$ , т.е. точки, в которых  $f''(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной  $f''(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . Если при этом критическая точка  $x_0$  разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то  $x_0$  является абсциссой точки перегиба графика функции.
4. Вычислить значения функции в точках перегиба.



**Пример 1:** Найти промежутки выпуклости и точки перегиба следующей кривой:

$$f(x) = 6x^2 - x^3.$$

Решение: Находим  $f'(x) = 12x - 3x^2$ ,  $f''(x) = 12 - 6x$ .

Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение  $x = 2$ .

$$12 - 6x = 0.$$

$x$	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		точка перегиба 16	

$$f(2) = 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 16$$

Ответ: Функция выпукла вверх при  $x \in (2; +\infty)$ ;  
 функция выпукла вниз при  $x \in (-\infty; 2)$ ;  
 точка перегиба  $(2; 16)$ .

### Общая схема для построения графиков функций

1. Найти область определения функции  $D(y)$ .
2. Найти точки пересечения графика функций с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.
7. Найти асимптоты функции.
8. По результатам исследования построить график.

**Пример:** Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = x^3 - 3x.$$

Решение:

1) Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

2) Найдем точки пересечения с осями координат:

с осью ОХ : решим уравнение  $x^3 - 3x = 0$

$$x(x^2 - 3) = 0, \quad x = 0 \quad \text{или} \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

с осью ОУ:  $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

3) Выясним, не является ли функция четной или нечетной:




$$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x).$$

Отсюда следует, что функция является нечетной.

4) Функция неперiodична.

5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции:  $y' = 3x^2 - 3$ .

$$\text{Критические точки: } 3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$		т. max 2		т. min -2	



$$y(0) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$$

$$y(2) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$

6) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

$$y'' = 6x$$

Критические точки:  $6x = 0$ ,  $x = 0$ .

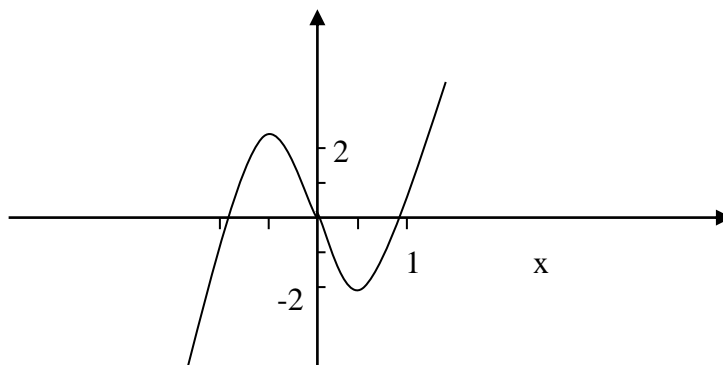
$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$y''$	$-$	$0$	$+$
$y$		точка перегиба 0	

$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

7) Функция непрерывна, асимптот у нее нет.

8) По результатам исследования построим график функции:

у



### Вопросы для самопроверки:

1. Что такое критические точки функции?
2. Сформулировать достаточные условия возрастания и убывания функции.
3. Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания функции?
4. Сформулируйте правила нахождения точек экстремума функции.
5. Сформулировать достаточное условие выпуклости функции. Приведите алгоритм нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба.

## Интегральное исчисление

### Неопределенный интеграл. Методы вычисления

**Определение:** Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$  или  $dF(x) = f(x)dx$ .

Любая непрерывная функция  $f(x)$  имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

**Определение:** Совокупность  $F(x)+C$  всех первообразных для функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

### Основные свойства неопределенного интеграла:

1.  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2.  $\int f'(x)dx = f(x) + C;$
3.  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
4.  $\int d(f(x)) = f(x) + C;$
5.  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$
6.  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$

### Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

#### Таблица интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \ln a^2 \pm x^2  + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$	

Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

**Пример 1:** Найти неопределенный интеграл:

$$\int \left( 5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx.$$

Решение:  $\int \left( 5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int 5 \cos x dx + \int 2 dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{4}{x^2 + 1} dx = \\
&= 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\
&= 5 \sin x + 2x - 3 \frac{x^3}{3} + \ln|x| - 4 \cdot \arctg x + C = \\
&= 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \cdot \arctg x + C.
\end{aligned}$$

**Пример 2:** Найти неопределенный интеграл:  $\int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx$ .

Решение:  $\int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx = \int \frac{x^2}{x^2} dx - \int \frac{2}{x^2} dx = \int dx - 2 \int x^{-2} dx =$   
 $= x - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{2}{x} + C.$

**Пример 3:** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

Решение:  $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1 - 1)dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1)dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$   
 $= \int dx - \arctg x + C = x - \arctg x + C$

### Метод подстановки в неопределенном интеграле (метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную  $x$  на  $\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  - непрерывно дифференцируемая функция, полагают  $dx = \varphi'(t)dt$  и получают

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную  $t$ . Для возвращения к переменной  $x$  необходимо заменить  $t$  значением  $t = \psi(x)$ , которое находится из соотношения  $x = \varphi(t)$ .

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

**Пример 1:** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

Решение:  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$   
 $= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$

**Пример 2:** Найти неопределенный интеграл  $\int \ctg x dx$

Решение:  $\int \ctg x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t; \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$   
 $= \ln|\sin x| + C$

**Пример 3:** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

Решение:  $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tge}^x + C$

**Пример 4:** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{4 + 25x^2}$

Решение:  $\int \frac{dx}{4 + 25x^2} = \int \frac{dx}{2^2 + (5x)^2} = \left| \begin{matrix} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{2^2 + t^2} =$   
 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{5x}{2} + C.$

### Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем отрезок на  $n$  частей точками  $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , выберем на каждом элементарном отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$  произвольную точку  $\xi_k$  и обозначим через  $\Delta x_k$  длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

**Определение:** Определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Для любой функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , всегда существует определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$

### Простейшие свойства определенного интеграла

- 1) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

- 3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- 4) Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- 5) Отрезок интегрирования можно разделить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$c$ -точка, лежащая между  $a$  и  $b$ .

- 6) Если  $f(x) \leq g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$ .

Для вычисления определенного интеграла от функции  $f(x)$ , в том случае, когда можно найти соответствующую первообразную  $F(x)$ , служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

**Пример 1:** Вычислить определенный интеграл  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ .

Решение:  $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

**Пример 2:** Вычислить определенный интеграл:  $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$ .

Решение: 
$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^9 \left( \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 \left( x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^9 = \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^9 = \left( \frac{2}{3} 9\sqrt{9} - 2\sqrt{9} \right) - \left( \frac{2}{3} 1\sqrt{1} - 2\sqrt{1} \right) = \\ &= 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  преобразуется с помощью подстановки

$t = \varphi(x)$  или  $x = \psi(t)$  в определенный интеграл относительно новой переменной  $t$ . При этом старые пределы интегрирования  $a$  и  $b$  заменяются соответственно новыми пределами  $t_1$  и  $t_2$ , которые находятся из исходной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются непосредственно:  $t_1 = \varphi(a)$ ,  $t_2 = \varphi(b)$ .

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений  $a = \psi(t_1)$ ,  $b = \psi(t_2)$ .

Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\psi(t)] \cdot \psi'(t) dt$$

**Пример 1:** Вычислить определенный интеграл методом замены переменной

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$$

Решение: 
$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, \quad t_1 = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x dx, \quad t_2 = \cos(\pi/2) = 0 \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int_1^0 t^2 dt = - \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^0$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot (0^3 - 1^3) = \frac{1}{3}.$$

**Пример 2:** Вычислить определенный интеграл:  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$ .

Решение: 
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \quad t_1 = \sqrt{1} = 1 \\ dx = 2t dt \quad t_2 = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2t dt}{t + 1} =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{(t+1) - 1}{t+1} dt = 2 \int_1^2 \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln(t+1)) \Big|_1^2 =$$

$$= 2(2 - \ln 3) - 2(1 - \ln 2) = 2 + 2 \ln \frac{2}{3}.$$

**Вопросы для самопроверки:**

1. В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?
2. Дать определение первообразной функции
3. Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции  $f(x)$  ?
4. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции  $f(x)$  ?
5. Дать определение неопределенного интеграла.
6. Перечислить свойства неопределенного интеграла
7. Дать определение определенного интеграла.
8. Перечислить свойства определенного интеграла.
9. Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
10. В чем отличия методов замены переменной в определенном и неопределенном интегралах?

## Числовые и функциональные ряды

**Понятие числового ряда.**

**Признаки сходимости числовых рядов**

**Определение:** Числовым рядом называется выражение вида  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

где числа  $a_1, a_2, \dots$  — называются членами ряда, член  $a_n$  — общим членом ряда.

Суммы конечного числа членов ряда:  $S_2 = a_1 + a_2$ ;  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ;

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  называются частичными суммами ряда. Так как число членов



ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ .

**Определение:** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число  $S$  в этом случае называется суммой ряда.

Если же последовательность частичных сумм  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  конечного предела не имеет, то ряд называется расходящимся.

**Необходимый признак сходимости ряда:** Если ряд сходится, то общий член ряда  $a_n$  при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Достаточный признак расходимости ряда:**

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

### Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

**Признак сравнения:** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и для всех  $n$  выполняется неравенство  $a_n \leq b_n$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку, для сравнения часто используются:

1. Ряд геометрической прогрессии  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ , ( $a > 0$ ), который сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ .
2. Гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  являющийся расходящимся всегда;
3. Обобщенно – степенной ряд  $1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \dots + \frac{1}{n^q} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ , который сходится при  $q > 1$  и расходится при  $q \leq 1$ .

**Признак Даламбера:** Пусть дан ряд с положительными членами

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , тогда при  $l < 1$  ряд сходится, при  $l > 1$  – расходится.

**З а м е ч а н и е.** При  $l=1$ , ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

**Признак Коши:** Пусть дан ряд с положительными членами

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , тогда при  $l < 1$  ряд сходится, при  $l > 1$  – расходится, при  $l = 1$  требуются дополнительные исследования.

**Интегральный признак.** Пусть дан ряд  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , члены которого являются значениями некоторой функции  $f(x)$ , положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале  $[1; +\infty)$ . Тогда если несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ; если же  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  так же расходится.

Рассмотрим примеры исследования числовых рядов на сходимость.

**Пример 1:** Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  расходится.

Решение: Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = 1.$$

Следовательно  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , а значит ряд расходится.

**Пример 2:** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  на сходимость.

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\text{Здесь } a_n = \frac{n}{3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3^n \cdot 3}.$$

$$\text{Вычислим предел: } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Так как  $l < 1$ , то по признаку Даламбера ряд сходится.

**Пример 3:** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$  на сходимость.

Решение: Применим признак Даламбера

$$a_n = \frac{n!}{10^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{10^n \cdot 10}$$

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1) \cdot 10^n}{10^n \cdot 10 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1$ , так как  $l > 1$ , то по признаку Даламбера ряд расходится.

**Пример 4:** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{5n+2} \right)^n$  на сходимость.

Решение: Применим признак Коши:  $a_n = \left( \frac{3n+1}{5n+2} \right)^n$ .

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{3n+1}{5n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( 5 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{3}{5}.$$

Так как  $l = \frac{3}{5} < 1$ , то по признаку Коши ряд сходится.

### Знакопеременные ряды

**Определение:** Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

**Определение:** Знакопеременный ряд называется знакопеременным, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно

$$a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Приведем достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

**Признак сходимости Лейбница.** Если абсолютные величины членов знакопеременного ряда  $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$  монотонно убывают:  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  и общий член ряда стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд сходится.

### Абсолютная и условная сходимости рядов

Возьмем знакопеременный ряд  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  могут быть как положительными, так и отрицательными, причем их расположение в ряде произвольно.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

**Определение:** Знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Определение:** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, а сам знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то он называется условно сходящимся.

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  является рядом с положительными членами, то для исследования вопроса о его сходимости можно применять рассмотренные ранее признаки сходимости: признаки сравнения, Даламбера, интегральный и др.

**Пример 1:** Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Решение: Составим ряд из модулей:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - это гармонический ряд, он расходится. Для исследования на сходимость исходного знакопеременного ряда применим признак Лейбница:  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > 0$  - первое условие выполнено;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 - \text{второе условие выполнено.}$$

Таким образом, по признаку Лейбница ряд сходится.

Так как ряд из модулей расходится, а сам знакопеременный ряд сходится, значит, он сходится условно.

**Пример 2:** Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов дан-

ного ряда:  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - это обобщенно-степенной ряд. Так как показатель степени  $q = 2 > 1$ , то он сходится. Если сходится ряд из модулей, то знакопеременный ряд сходится абсолютно.

## Степенные ряды

**Определение:** Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

называется функциональным рядом.

**Определение:** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \text{ где } x - \text{независимая}$$

переменная,  $x_0$  - фиксированное число,  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  - постоянные коэффициенты.

При  $x_0 = 0$  степенной ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

**Определение:** Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений  $x$ , при которых данный ряд сходится.

Нахождение области сходимости состоит из двух этапов:

- 1) Определяется интервал сходимости степенного ряда, т.е. интервал  $(-R; R)$  числовой оси, симметричный относительно точки  $x=0$  и обладающий тем свойством, что при всех  $|x| < R$  - ряд сходится.  $R$  – радиус сходимости нахо-

дится по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

- 2) Исследуется сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  на концах интервала сходимости, т.е. в точках  $x = -R$  и  $x = R$ .

В зависимости от результатов исследования, область сходимости запишется одним из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} -R \leq x \leq R & \quad \text{или} \quad x \in [-R; R]; \\ -R < x \leq R & \quad \text{или} \quad x \in (-R; R]; \\ -R \leq x < R & \quad \text{или} \quad x \in [-R; R); \\ -R < x < R & \quad \text{или} \quad x \in (-R; R). \end{aligned}$$

Для степенного ряда вида  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  интервал сходимости имеет вид  $-R < x - x_0 < R$  или  $-R + x_0 < x < R + x_0$ .

**Пример 1:** Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ .

Решение: Найдем радиус сходимости степенного ряда.

В данном случае  $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$ , тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot 3}{n \cdot 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 3}{n} = 3$$

Запишем интервал сходимости:  $-3 < x < 3$ .

Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала.

При  $x = 3$  получаем числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - это гармонический ряд, он расходится.

При  $x = -3$  получаем знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . Исследуем его на

сходимость с помощью признака Лейбница:  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно ряд сходится.

Рассмотрим ряд из модулей его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Как показано выше данный ряд расходится.

Отсюда можно сделать вывод, что при  $x = -3$  заданный степенной ряд сходится условно.

Ответ: Область сходимости ряда  $-3 \leq x < 3$ .

**Литература:** [1] стр.396-418, 420-429, 431-445, задания № 12.1-12.8, стр. 407, № 12.9-12.13, стр. 429, № 13.3, стр. 446; [4] стр. 379-402.

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется частичной суммой числового ряда?
2. Что называется суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся?
4. Какой ряд называется расходящимся?
5. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда с неотрицательными членами.
6. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.
7. Какой ряд называется знакочередующимся ?
8. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся рядов?
9. Дать понятие функционального ряда.
10. Что называется интервалом и областью сходимости степенного ряда?
11. Приведите алгоритм нахождения области сходимости.

**Методические указания  
к выполнению контрольной работы по математике**

Контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку с полями. На обложке тетради указываются ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО студента, КУРС, ФАКУЛЬТЕТ и СПЕЦИАЛЬНОСТЬ по которой он обучается, НОМЕР и ВАРИАНТ контрольной работы.

Условия задач переписываются полностью, после чего приводится подробное решение со ссылками на использованные формулы, с аккуратными чертежами там, где они потребуются. В работе должны быть рассмотрены все задания. Работа, содержащая не все задания или задачи не своего варианта, не зачитывается.

Если работа содержит ошибки, она возвращается студенту с указанием допущенных ошибок. В этом случае студент должен сдать эту же работу повторно с исправлениями допущенных ошибок и дополнениями в конце ранее выполненной работы.

Контрольную работу следует сдать в деканат не позже чем за неделю до начала экзаменационной сессии.